Matematika A 2 – funkce více proměnných (2)

I) Parciální derivace funkcí několika proměnných (další příklady)

1. Spočtěte parciální derivace všude, kde existují, funkcí:
   $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$; $f(x,y) = (1+xy)^{y}$; $f(x,y,z) = x^{y^{z}}$;

2. V kterém bodě je gradient funkce $f(x,y) = \ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$ roven vektoru $\left(1, -\frac{16}{9}\right)$?

3. Parciální derivace vyšších řádů!
   Je-li $f(x,y) = e^{x}(\cos y + x\sin y)$, ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ v E^2.
   Je-li $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, ukažte, že $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}$ pro body $(x,y) \neq (0,y)$, $y \in R$

4. Spočtěte všechny parciální derivace 2. řádu funkcí:
   $f(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$; $f(x,y) = e^{xe^{y}}$

5. Vypočtěte $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ funkce $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

6. Je-li $f(x,y) = \ln\left(e^{x}+e^{y}\right)$, ukažte, že v E^2 platí:
   $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0$$

7. Je-li $f(x,y) = \frac{y}{y^2-a^2x^2}$, ukažte, že je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ v Df.

8. Najděte df a d^2f funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$; $f(x,y) = e^{xy}$;
   $f(x,y,z) = xy + yz + zx$; $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$

II: Derivace ve směru:

1. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $(2,1)$ $(6e^2)$

2. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y)=x^3-2x^2y+xy^2+1$ v bodě $M=[1,2]$ ve směru vektoru, který jde z bodu M do bodu $N=[4,6]$.

3. Určete derivaci funkce $f(x,y)=\ln(x+y)$ v bodě $[1,2]$ ležícím na parabole $y^2=4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

4. Rozhodněte, zda funkce $f(x,y,z)=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^3$ v bodě $A=[1,1,1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(2,1,2)$ roste nebo klesá. (roste)

III. Derivace složené funkce:

1. Spočtěte všude, kde existuje, derivaci $\frac{dg}{dt}$, je-li $g(t)=f(x(t),y(t))$, kde (i) $f(x,y)=e^{x-2y}$, $x(t)=\sin t$, $y=t^3$

   (ii) $f(x,y)=\arcsin(x-y)$, $x(t)=3t$, $y(t)=4t^3$

   (iii) $x=t$, $y=\varphi(t)$, tj. $\frac{d}{dt}f(t,\varphi(t))$

2. Totéž pro fci $g(t)=f(\cos t, e^t)$,

   $g(t)=f(t^2, \frac{1}{t}, t)$

3. Spočítejte parciální derivace složených funkcí (kde existují)

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)),$$

když:

(i) $f(x,y) = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$;

(ii) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $x = u+v$, $y = u-v$; zde ukažte, že platí $\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$;

4. Má-li funkce $f(u,v)$ spojité parciální derivace 2. řádu, vyjádřete parciální derivace 1. a 2. řádu složených funkcí:

$g(x,y) = f(x^2-y^2, e^{xy})$; $g(x,y) = f(x+y, xy)$

$g(x,y) = f(xy, \frac{x}{y})$; $g(x,y,z) = f(x+y, z)$;

$g(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$;

5. Je-li funkce $f(x,y,z)$ taková, že má spojité parciální derivace 2. řádu v E^3, vyjádřete parciální derivace 1. a 2. řádu složených funkcí:

(i) $g(x,y) = f(x, y, \varphi(x,y))$ (φ má derivace 1. a 2. řádu v E^2)

(ii) $g(u,v) = f(u^2+v^2, uv, \frac{u}{v})$

6. Ukažte, že funkce $u(x,y) = f(x+ay) + g(x-ay)$ splňuje rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(f a g mají derivace 2. řádu v R)